

## Grado en Biotecnología – Ejercicios de Análisis Matemático

### Relación 8 – Integrales múltiples

1. Calcula la integral de la función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  en los siguientes casos:
  - a)  $f(x, y) = x$  siendo  $A$  el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ .
  - b)  $f(x, y) = x$  siendo  $A$  la región limitada por la recta que pasa por  $(0, 2)$  y  $(2, 0)$  y la circunferencia de centro  $(0, 1)$  y radio 1.
  - c)  $f(x, y) = e^{x/y}$  siendo  $A$  la región limitada por  $y^2 = x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ .
  - d)  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$  siendo  $A$  la región limitada por  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $y = x$ .
  - e)  $f(x, y) = xy$  siendo  $A$  la región limitada por la semicircunferencia superior  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ ,  $y \geq 0$ , y el eje  $OX$ .
  - f)  $f(x, y) = e^{x^2}$  siendo el conjunto  $A$  el triángulo formado por las rectas  $2y = x$ ,  $x = 2$  y el eje  $x$ .
2. Calcula el volumen de la región  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  comprendida entre el plano  $XY$  y el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y que queda dentro del cilindro  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ . Es decir:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$$

3. Calcula el volumen de la región  $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \right\}$ .
4. Calcula el volumen del conjunto  $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} \leq 1, x^2 + y^2 \geq 4 \right\}$ .
5. Calcula  $\iint_A e^{x^2 + y^2} d(x, y)$  donde  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ .
6. Calcula  $\iint_A \frac{1}{1 + x^2 + y^2} d(x, y)$  donde  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ .
7. Calcula la integral  $\iint_A \frac{\sqrt{x^2 + y^2} e^{x^2 + y^2}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} d(x, y)$  donde  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y, 0 \leq x\}$ .
8. Calcula  $\iint_A \frac{y^2 e^{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} d(x, y)$  donde  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$ .
9. Calcula la integral  $\iint_A \frac{1}{(4 - x^2 - y^2)(1 + x^2 + y^2)} d(x, y)$  donde  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, |y| \leq x\}$ .
10. Calcula la integral  $\iint_A (x^2 + y^2) \sqrt{1 - x^2 - y^2} d(x, y)$  donde  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x, 0 \leq y\}$ .
11. Calcula, mediante una integral doble, el área del conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y, y \leq x\}$ .
12. Calcula  $\iint_A \exp((x^2 + y^2)/2x) d(x, y)$  donde  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ .